Cheatsheet Gleichungen

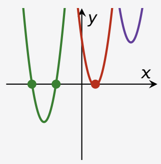
Christian Rybovic
September 2024

1 Quadratische Gleichungen

Einge quadratische Gleichung besitzt immer einen quadratisches Glied (**ax^2**). Das lineare (**bx**) und absolute (**c**) Glied wird nicht zwingend benötigt.

Die Diskriminante (**D**) besagt, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung besitzt.

$D > 0 \rightarrow$ 2 Lösungen
$D = 0 \rightarrow$ 1 Lösung
$D < 0 \rightarrow$ Keine reelle Lösung



1.1 Reinquadratische Gleichung

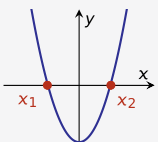
$$ax^2 + c = 0 \qquad ax^2 = 0$$

Eine reinquadratische Gleichung besitzt kein lineares (**bx**), aber optional ein absolutes (**c**) Glied. Solche Gleichungen können mithilfe der Wurzel gelöst werden.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 && \mid +16 \\ x^2 &= 16 && \mid \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 4 \qquad \mathbb{L} = \{-4; 4\}$



Bei einer reinquadratischen Gleichung ist der Graph immer symetrisch.

1.2 Quadratische Gleichung ohne Absolutglied

$$ax^2 + bx = 0$$

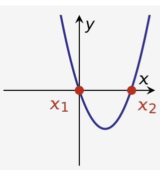
Die Lösung einer quadratischen Gleichung ohne Absolutglied (**c**) kann durch ausklammern schnell gefunden werden.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} 2x^2 + 34x &= 0 && \mid :2 \\ x^2 + 17x &= 0 \\ x_1\,(x_2 + 17) &= 0 \end{aligned}$$

$x_2 + 17 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -17 \qquad \mathbb{L} = \{-17; 0\}$



Bei einer quadratischen Gleichung ohne Absolutglied geht der Graph immer durch 0.

1.3 Quadratische Gleichung mit Absolutglied

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Bietet sich die Darstellung in Produkteform an, kann die Gleichung sehr einfach durch raten gelöst werden. Liegt eine Lösungsmenge vor, kann die Formel mithilfe der Darstellung in Produkteform auch rekonstruiert werden.

BEISPIEL

$\mathbb{L} = \{-7; 4\}$

$x_1 = -7 \qquad x_2 = 4$

$x_1 + 7 = 0 \qquad x_2 - 4 = 0$

$(x + 7)(x - 4) = 0$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

1.3.1 Quadratisch ergänzen

Beim quadratischen Ergänzen wird die Gleichung mithilfe dem 1. oder 2. Binom ergänzt und ausgerechnet.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x - 24 &= 0 && \mid :2 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 && \mid +12 \\ x^2 - 4x + 4 &= 12 + 4 \\ (x - 2)^2 &= 16 && \mid \sqrt{\ } \\ x - 2 &= \pm 4 && \mid +2 \\ x_{1,2} &= 2 \pm 4 \end{aligned}$$

$\frac{n}{2} \qquad n^2 \qquad n^2$

$x_1 = 2 - 4 \qquad x_2 = 2 + 4$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 6 \qquad \mathbb{L} = \{-2; 6\}$

1.3.2 abc-Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad D = b^2 - 4ac$$

Um eine Gleichung mit der abc-Formel zu lösen, müssen die Koeffizienten **a**, **b** und **c** bestimmt und eingesetzt werden.

BEISPIEL

$2x^2 + 6x - 8 = 0 \qquad D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 100$

$a \qquad b \qquad c$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot -8}}{2 \cdot 2} \\ x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{4} \\ x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} \\ x_{1,2} &= \frac{-6 \pm 10}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = \frac{-6 - 10}{4} \qquad x_2 = \frac{-6 + 10}{4}$

$x_1 = -\frac{16}{4} \qquad x_2 = \frac{4}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 1 \qquad \mathbb{L} = \{-4; 1\}$

1.3.3 pq-Formel

$$x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Für die pq-Formel muss die Gleichung in der Normalform vorliegen. Ohne **px** oder **q** wird für diese **0** eingesetzt.

BEISPIEL

$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad D = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4 = 0$

$p \qquad q$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\left(\frac{-4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\ x_{1,2} &= 2 \pm 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 2 - 0 \qquad x_2 = 2 + 0$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2 \qquad \mathbb{L} = \{2\}$

1.3.4 Satz von Vieta

Sind **x_1** und **x_2** die Lösungen einer quadratischen Gleichung, dann gilt für diese:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Mithilfe der vietaschen Wurzelsätze lässt sich eine Formel überprüfen oder aus der Lösungsmenge rekonstruieren.

BEISPIEL

$\mathbb{L} = \{-3; 5\}$

$x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 5 = -15 \quad q$

$x_1 + x_2 = -3 + 5 = -(2) \quad -p$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

2 Biquadratische Gleichungen

Eine biquadratische Gleichung lässt sich durch substition zu einer quadratischen Gleichung machen. Hierfür verwendet man die Hilfsvariable **u** für **x^2**. Die daraus entstehende quadratische Gleichung kann dann mithilfe der Produkteform, der abc- oder pq-Formel berechnet werden. Zum Schluss muss die Substitution wider rückgängig gemacht werden.

BEISPIEL

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$x^2 \Rightarrow u$

$u^2 - 13u + 36 = 0$

QUADRATISCHE GLEICHUNG BERECHNEN

$u_1 = 4 \qquad u_2 = 9$

$u \Rightarrow x^2$

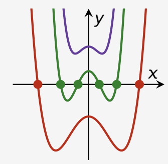
$x^2 = 4 \qquad \sqrt{\ } \qquad x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm 2 \qquad x_{3,4} = \pm 3$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = -3 \qquad x_4 = 3$

$\mathbb{L} = \{-3; -2; 2; 3\}$

Eine biquadratische Gleichung kann **keine**, **2** oder **4** Lösungen haben.



3 Ungleichungen

Bei der Mulitplikation oder Division mit einer negativen Zahl, muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} 2(x - 1) &> 4x + 6 \\ 2x - 2 &> 4x + 6 && \mid -4x + 2 \\ -2x &> 8 && \mid :(-2) \\ x &< -4 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\} = \mathbb{R}^{<-4}$

3.1 Bruchungleichungen

Beim Bestimmen des Definitionsbereiches muss darauf geachtet werden, ob sich der Wert bei einer grösseren Zahl vergrössert (⊕) oder verkleinert (⊖).

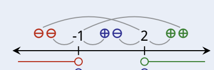
Bei den Berechnungen der Teillösungsmengen ergibt sich dann, ob zusätzlich das Ungleichheitszeichen im Resultat der normalen Berechnung gekehrt werden muss (immer bei einer ungeraden Anzahl ⊖).

BEISPIEL

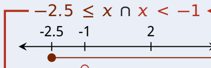
$$\begin{aligned} \frac{2}{x + 1} &\leq \frac{6}{x - 2} && \mid \cdot (x + 1)(x - 2) \\ 2x - 4 &\leq 6x + 6 && \mid -2x - 6 \\ -10 &\leq 4x && \mid :4 \\ -2.5 &\leq x \end{aligned}$$

DEFINITIONSBEREICH BESTIMMEN

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

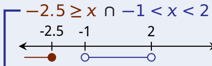


$-2.5 \leq x \cap x < -1$

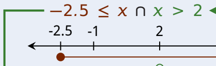


⊕⊖

$-2.5 \geq x \cap -1 < x < 2$



$-2.5 \leq x \cap x > 2$



$\mathbb{L}_1 \qquad \mathbb{L}_2 \qquad \mathbb{L}_3$

$[-2.5; -1[\ \cup \{\ \} \cup\ ]2; \infty[\ = \mathbb{L} = \mathbb{R}^{\geq -2.5} \setminus [-1; 2]$