Menge $\mathbb{M}$

Eine Menge ist eine **Zusammenfassung von Elementen**.

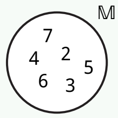
Mengen werden mit einem Grossbuchstaben und Doppelstrich gekennzeichnet.

Eine Menge kann auch keine Elemente enthalten:

$$\mathbb{M} = \{\}$$

Mengen können sowohl **endlich** als auch **unendlich** sein.

Grafische Form:



Aufzählende Form:

$$\mathbb{M} = \{2, 3, 4, \dots, 7\}$$

Beschreibende Form:

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\}$$

Element $\in$

Die Objekte einer Menge werden als Elemente bezeichnet.

Links von $\in$ und $\notin$ steht immer das Element und rechts immer eine Menge.

$\underbrace{x \in \mathbb{A}}_{\text{gehört zur Menge}}$ $\qquad$ $\underbrace{x \notin \mathbb{A}}_{\text{gehört nicht zur Menge}}$

Kardinalzahl $|\mathbb{A}|$

Kardinalzahlen sind Zahlen, welche **die Anzahl** von Elementen in einer Menge beschreiben.

Die Kardinalzahl ist immer eine natürliche Zahl ($\mathbb{N}$).

Für die Menge $\mathbb{A} = \{3, w, 7, t, 1\}$ zum Beispiel gilt:

$$|\mathbb{A}| = 5$$

Mächtigkeit $\sim$

Die Mächtigkeit einer Menge entspricht bei endlichen Mengen der Anzahl aller Elemente (Kardinalzahl).

Zwei Mengen sind nur dann gleichmächtig, wenn beide Mengen die gleiche Kardinalzahl haben:

$$|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}|$$

$\underbrace{\mathbb{A} \sim \mathbb{B}}_{\text{gleichmächtig}}$ $\qquad$ $\underbrace{\mathbb{A} \nsim \mathbb{B}}_{\text{nicht gleichmächtig}}$

Teilmenge $\subset$

Sind alle Elemente einer Menge auch in einer anderen Menge enthalten, so ist dies eine Teilmenge.

Links und rechts von $\subset$ und $\not\subset$ steht immer eine Menge.

Jede Menge ist auch Teilmenge von sich selbst:

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{A}$$

Die leere Menge ist Teilmenge von jeder Menge:

$$\{\} \subset \mathbb{A}$$

$\underbrace{\mathbb{A} \subset \mathbb{B}}_{\text{Teilmenge}}$ $\qquad$ $\underbrace{\mathbb{A} \not\subset \mathbb{B}}_{\text{keine Teilmenge}}$

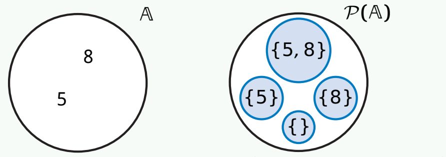
Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{A})$

Die Potenzmenge entspricht **allen Teilmengen** einer Menge.

Die leere Menge und die Menge selber sind **immer** Teil der Potenzmenge.

$\{\} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \qquad \mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$

Die Gesamtanzahl der Teilmengen lässt sich mit 2^n bestimmen.



$\mathbb{A} = \{5, 8\} \qquad \mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\{\}, \{5\}, \{8\}, \{5, 8\}\}$

Komplementmenge (Negation) $\overline{\mathbb{A}}$

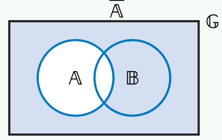
In der Komplementmenge sind alle Elemente aus der Grundmenge $\mathbb{G}$, welche **nicht** in der Menge selbst enthalten sind.

Die Komplementmenge ergänzt die Menge zur Grundmenge:

$$\mathbb{A} \cup \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{G}$$

Wird nichts weiter angegeben, dann wählt man in der Regel $\mathbb{R}$ als Grundmenge.

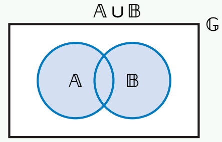
$\overline{\mathbb{A}}$



Vereinigungsmenge $\cup$

Alle Elemente aus beiden Mengen gehören zur Vereinigungsmenge.

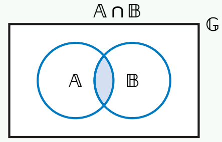
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$



Schnittmenge $\cap$

Nur die Elemente, welche sich in **beiden** Mengen befinden, gehören zur Schnittmenge.

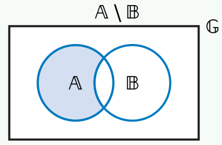
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$



Differenzmenge $\setminus$

In der Differenzmenge sind alle Elemente einer Menge enthalten, welche **nicht** zur anderen Menge gehören.

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$

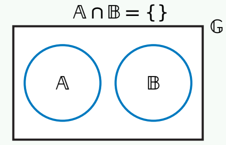


Elementfremd (Disjunkt)

Zwei Mengen sind elementfremd, wenn sie **kein** gemeinsames Element besitzen.

Die leere Menge $\{\}$ ist disjunkt zu **jeder** beliebigen Menge.

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\}$



Intervall [;]

Ein Intervall entspricht einer bestimmten Teilmenge der Zahlengerade und wird in eckigen Klammern, getrennt durch ein Semikolon, angegeben.

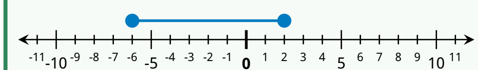
Die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze des Intervalls heißt **Intervalllänge**.

Ist die Klammer nach innen gerichtet, gehört die jeweilige Grenze zum Bereich dazu. Ist sie nach aussen gerichtet, gehört sie nicht dazu.

Es gibt **endliche** und **unendliche** Intervalle, wobei $\pm\infty$ **nie** selbst dazugehört (Klammer immer nach aussen).

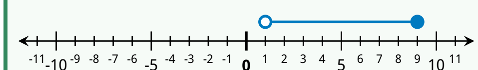
Geschlossenes Intervall:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 2\} = [-6; 2]$$



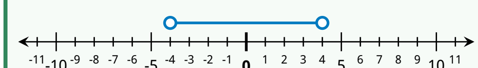
Halboffenes Intervall:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 9\} =]1; 9]$$



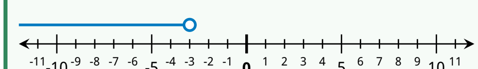
Offenes Intervall:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\} =]-4; 4[$$



Unendliches Intervall:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\} =]-\infty; -3[$$



Logisches UND $\wedge$

Bei einem logischen UND müssen zwingend **alle** Bedingungen erfüllt sein, damit der Ausdruck erfüllt wird.

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \underbrace{x > 2}_{a} \wedge \underbrace{x < 7}_{b}\}$$

$$\mathbb{M} = \{3, 4, 5, 6\}$$

a	b	x
✓	✓	✓
✓	×	×
×	✓	×
×	×	×

Logisches ODER $\vee$

Beim logischen ODER muss **mindestens eine** Bedingung zutreffen, damit der Ausdruck erfüllt wird.

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \underbrace{x < 3}_{a} \vee \underbrace{x = 9}_{b}\}$$

$$\mathbb{M} = \{0, 1, 2, 9\}$$

a	b	x
✓	✓	✓
✓	×	✓
×	✓	✓
×	×	×

Term

Ein Term ist eine mathematisch sinnvolle Aneinanderreihung von **Zahlen**, **Variablen**, **Klammern** und **Operatoren** (+, −, ×, ÷). Auch einzelne Zahlen und Variablen können Terme sein.

Terme enthalten **keine** Relationszeichen (=, <, >, …).

Nur wenn ein Terme die **gleichen Variablen** und die **gleichen Potenzen der Variablen** enthält, ist er **gleichartig**. Erfüllt ein Term diese Anforderungen nicht, so ist er ungleichartig:

$$\overbrace{\underbrace{31a}_{\text{Term}}\quad\underbrace{y}_{\text{Term}}\quad\underbrace{8c}_{\text{Term}}}^{\text{Ungleichartige Terme}} \qquad \overbrace{\underbrace{4av}_{\text{Term}}\quad\underbrace{-av}_{\text{Term}}}^{\text{Gleichartige Terme}}$$

$$\overbrace{\underbrace{a^2}_{\text{Term}}\quad\underbrace{a^7}_{\text{Term}}}^{\text{Ungleichartige Terme}} \qquad \overbrace{\underbrace{x}_{\text{Term}}\quad\underbrace{-3x^1}_{\text{Term}}\quad\underbrace{2x}_{\text{Term}}}^{\text{Gleichartige Terme}}$$

Terme sind **gleichwertig** (äquivalent), wenn sie bei ihrer Berechnung den gleichen Wert aufweisen:

$$\overbrace{\underbrace{4\cdot 3}_{\text{Term}}\quad\underbrace{2\cdot 6}_{\text{Term}}}^{\text{Gleichwertige Terme}} \qquad \overbrace{\underbrace{3^2+2x-x}_{\text{Term}}\quad\underbrace{9+x}_{\text{Term}}}^{\text{Gleichwertige Terme}}$$

Bei einem eingliedrigen Term spricht man von **Monom**. Ein **Binom** ist ein zweigliedriger Term, der durch + oder − verbunden ist (anders formuliert ist ein Binom die Summe oder Differenz zweier Monome). Mehrgliedrige Terme nennt man **Polynome**:

$$\underbrace{4ab}_{\text{Monom}} \qquad \underbrace{7}_{\text{Monom}} \qquad \underbrace{-5x^2y}_{\text{Monom}}$$

$$\underbrace{(2a+2b)}_{\text{Binom}} \qquad \underbrace{a^2-b^2}_{\text{Binom}} \qquad \underbrace{6m^n+4}_{\text{Binom}}$$

$$\underbrace{3x^2-8x+2}_{\text{Polynom}} \qquad \underbrace{a+b+c}_{\text{Polynom}} \qquad \underbrace{x^2+3x-1}_{\text{Polynom}}$$

Der **Koeffizient** ist eine Zahl, welche am Anfang des Terms steht und mit der Variable multipliziert wird:

$$2ab \qquad 13x^5y$$

Klammerrechnung

Steht vor der Klammer ein **Pluszeichen** (+), kann die Klammer einfach weggelassen werden:

$$+(a+b) = a+b$$
$$+(a-b) = a-b$$
$$+(-a-b) = -a-b$$

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen** (−), so müssen die Vorzeichen beim auflösen **umgekehrt** werden:

$$-(a+b) = -a-b$$
$$-(-a+b) = a-b$$
$$-(a-b) = -a+b$$

Steht vor der Klammer ein **Faktor**, so müssen alle Terme in der Klammer mit dem Faktor **multipliziert** werden:

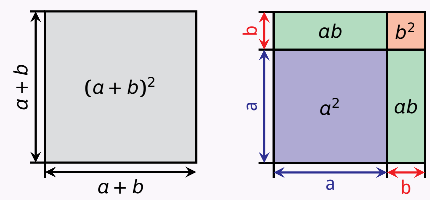
$$a\cdot(b+c) = ab+ac$$
$$2\cdot(x-y) = 2x-2y$$
$$0.5\cdot(x\cdot 6y) = 3xy$$

Wenn der Term, mit dem die Klammer multipliziert werden soll, selbst eine **Klammer** mit einer Summe oder Differenz ist, muss jeder Term der ersten Klammer mit jedem Term der zweiten Klammer multipliziert werden:

$$(a+b)\cdot(c-d) = ac-ad+bc-bd$$
$$(2x+5)\cdot(3x+6) = 6x^2+27x+30$$

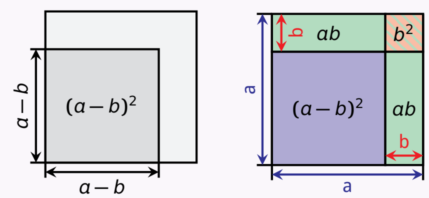
1. binomische Formel (Plus-Formel)

$$(a+b)^2$$
$$(a+b)\cdot(a+b)$$
$$a^2+ab+ab+b^2$$
$$a^2+2ab+b^2$$



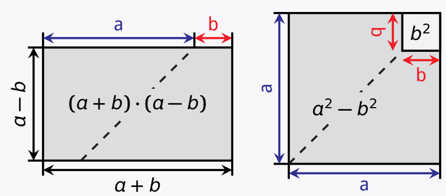
2. binomische Formel (Minus-Formel)

$$(a-b)^2$$
$$(a-b)\cdot(a-b)$$
$$a^2-ab-ab+b^2$$
$$a^2-2ab+b^2$$



3. binomische Formel (Plus-Minus-Formel)

$$(a+b)\cdot(a-b)$$
$$a^2-ab+ab-b^2$$
$$a^2-b^2$$

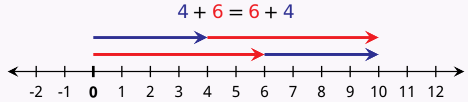


Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Beim Kommutativgesetz können **die Argumente** einer Operation vertauscht werden, **ohne** dass sich das Ergebnis verändert.

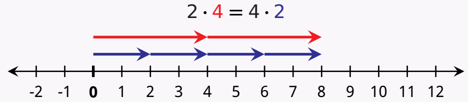
Addition:

$$4+6=6+4$$



Multiplikation:

$$2\cdot 4=4\cdot 2$$



Das Kommutativgesetz gilt auch bei der Addition von Brüchen, Variablen und negativen Zahlen, sowie in der Mengenlehre bei der Vereinigung und dem Schnitt.

$$a+b=b+a \qquad \mathbb{A}\cup\mathbb{B}=\mathbb{B}\cup\mathbb{A}$$
$$a\cdot b=b\cdot a \qquad \mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\mathbb{B}\cap\mathbb{A}$$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

Beim Assoziativgesetz können **die Klammern** beliebig gesetzen werden, **ohne** dass sich das Ergebnis ändert. Dies gilt für die Addition (+) und die Multiplikation (×).

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$a\cdot b\cdot c = (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

Vorrangregeln

Die Klammern haben beim Auflösen von Termen oberste Priorität. Es können mehrere Klammern in einem Term vorkommen und diese können sich verschachteln (immer von innen nach aussen auflösen).

1. Klammern auflösen
2. Potenzen zusammenfassen
3. Punktrechnung (×, ÷) berechnen
4. Strichrechnung (+, −) berechnen

Vereinfachen - Multiplikation

Enthält ein Faktor den **Wert 0**, ist auch das Produkt 0:

$$8a\cdot 0\cdot x = 0$$

Ungleiche Variablen werden zusammengesetzt:

$$x\cdot 3a = 3ax$$

Bei **gleichen Variablen** werden die Potenzen addiert:

$$2a^3\cdot a = 2a^3\cdot a^1 = 2a^{3+1} = 2a^4$$

Die **Koeffizienten** werden multipliziert:

$$2x\cdot 3y = 6xy$$

Bei **Brüchen** wird der Zähler mit dem Zähler und der Nenner mit dem Nenner multipliziert:

$$\frac{4}{x}\cdot\frac{2y}{5} = \frac{4\cdot 2y}{x\cdot 5} = \frac{8y}{5x}$$

Vereinfachen - Division

Alleinstehende Variablen können entfernt werden:

$$3ax : a = 3x$$

Die Potenzen **gleicher Variablen** werden subtrahiert:

$$x^6 : x^2 = x^{6-2} = x^4$$

Die **Koeffizienten** werden dividiert:

$$4x : 2 = 2x$$

Die **Brüche** werden mit dem Kehrbruch multipliziert:

$$\frac{2}{3x}:\frac{1}{y} = \frac{2}{3x}\cdot\frac{y}{1} = \frac{2\cdot y}{3x\cdot 1} = \frac{2y}{3x}$$

Vereinfachen - Strichrechnung

Nur gleichartige Terme können zusammengefasst werden.

Beim Zusammenfassen werden die **Koeffizienten** addiert oder subtrahiert und die Variablen bleiben erhalten:

$$4xy+3xy = 7xy$$

$$5a-a = 5a-1a = 4a$$

$$4n+6c-2n+3c-2c = 2n+7c$$

Faktorzerlegung

Faktorisieren bedeuted, den Summen- (+) oder Differenzterm (−) in einen Produktterm (×) umwandeln.

Können **alle Glieder** durch einen gemeinsamen Faktor geteilt werden, so kann der grösste gemeinsame Teiler ausgeklammert werden:

$$\underbrace{6x^2y^2}_{\text{Glied}} - \underbrace{3x^3y}_{\text{Glied}} + \underbrace{9x^2y^2}_{\text{Glied}} \qquad \underbrace{3x^2y}_{\text{ggT}}$$

$$3x^2y(\,2y - x + 3y\,)$$

Da **der Aufbau** der binomischen Formeln bekannt ist, können diese durch Einsetzen sehr einfach und schnell angewendet werden:

$$\underbrace{4c^2 + 12cd + 9d^2}_{\text{1. binomische Formel}} = (2c + 3d)^2$$

$$\underbrace{9y^2 - 12yz + 4z^2}_{\text{2. binomische Formel}} = (3y - 2z)^2$$

$$\underbrace{9r^2 - 25t^2}_{\text{3. binomische Formel}} = (3r + 5t)\,(3r - 5t)$$

Bei **binomähnlichen** Strukturen (Polynom 2. Grades) können die Werte durch raten oder mithilfe der Mitternachts- oder pq-Formel berechnet werden:

$$x^2 - 6x + 8 = (x \pm ?)(x \pm ?)$$

$$-1 \cdot -8 = 8 \quad \& \quad -1 - 8 \neq -6$$
$$+1 \cdot +8 = 8 \quad \& \quad +1 + 8 \neq -6$$
$$-2 \cdot -4 = 8 \quad \& \quad -2 - 4 = -6$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Bei einer geraden Anzahl Glieder kann ein gemeinsamer Faktor **aus Gruppen** von zwei oder mehreren Glieder ausgeklammert werden (mehrmaliges ausklammern):

$$\underbrace{21ax - 6x}_{\text{Gruppe 1}} - \underbrace{35a + 10}_{\text{Gruppe 2}}$$

$$\underbrace{3x(7a - 2)}_{\text{Gruppe 1}} \; \underbrace{-5(7a - 2)}_{\text{Gruppe 2}}$$

$$(7a - 2)\;(3x - 5)$$

Mitternachtsformel

Mithilfe der Mitternachtsformel können bestimmte **quadratische Gleichungen** auf einfache Weise gelöst werden.

Es ist sehr wichtig, bei a, b und c genau auf **die Vorzeichen** zu achten.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung ist:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pq-Formel

Die pq-Formel kann nur verwendet werden, wenn vor dem x^2 **nichts oder 1** als Koeffizient steht.

Lösungsformel für eine quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Allgemeines zu Brüchen

Es darf **niemals** durch 0 geteilt werden:

$$\frac{x}{0} = \mathit{undefiniert}$$

Einen Term kann man in einen Bruch umwandeln, indem man den Nenner auf 1 setzt:

$$5c \rightarrow \frac{5c}{1}$$

Bei einem negativen Bruch kann das Vorzeichen **vor dem Bruch**, im **Zähler** oder im **Nenner** angegeben werden, ohne dass sich der Bruch ändert:

$$\frac{-2}{4} = -\frac{2}{4} = \frac{2}{-4}$$

Ist der Nenner im Resultat einer Bruchrechnung 1, dann wird nur der Zähler als Resultat geschrieben:

$$\frac{6xy}{1} \rightarrow 6xy$$

Im Resultat werden binomische Formeln **nicht** ausgeschrieben (immer das Produkt stehen lassen).

Bruchterm erweitern

Um zu erweitern, muss man **Zähler und Nenner** mit demselben Faktor (Erweiterungsfaktor) **multiplizieren**:

$$\underbrace{\frac{cd}{3a}}_{\text{Bruchterm}} \qquad \underbrace{3x}_{\text{Erweiterungsfaktor}}$$

$$\frac{cd \cdot 3x}{3a \cdot 3x} = \frac{3cdx}{9ax}$$

Bruchterm kürzen

Gekürzt werden kann, indem **Zähler und Nenner** mit der gleichen Zahl, Variable oder Klammer (Kürzungsfaktor) **dividiert** wird:

$$\underbrace{\frac{4ab}{8b^2}}_{\text{Bruchterm}} \qquad \underbrace{2b}_{\text{Kürzungsfaktor}}$$

$$\frac{4ab : 2b}{8b^2 : 2b} = \frac{2a}{4b}$$

Gekürzt werden dürfen nur Faktoren, die Zähler **und** Nenner gemeinsam haben.

Werden mehrere Bruchterme miteinander multipliziert, kann auch **übergreiffend** gekürzt werden:

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}c} \cdot \frac{a\cancel{y}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{x}\cancel{y}} = \frac{a}{c}$$

Würde beim Kürzen eine Zahl von einem + oder − getrennt werden, darf man **nicht** kürzen. Es dürfen **nur Produkte und Quotienten** gekürzt werden, nie Summen oder Differenzen:

$$\frac{\cancel{3a} + 4cd}{x + \cancel{3a}} = \cancel{\frac{4cd}{x}}$$

Kann ein Bruch nicht mehr weiter gekürzt werden, dann spricht man von **vollständig gekürzt**:

$$\frac{10a^2(3-x)}{2ac^2(3-x)} = \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{(3-x)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot c \cdot \cancel{(3-x)}} = \frac{5a}{c^2}$$

Gleichnamige Brüche

Brüche sind gleichnamig, wenn sie den **gleichen Nenner** (Hauptnenner) haben:

$$\overbrace{\frac{c}{ab} \quad \frac{2a}{3a}}^{\text{Ungleichnamige Brüche}} \qquad \overbrace{\frac{14a}{4a} \quad \frac{ac}{4a}}^{\text{Gleichnamige Brüche}}$$

Bruchterme kann man mithilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfaches gleichnamig machen. Hierfür müssen die **im Nenner fehlenden Faktoren** im Nenner **und** im Zähler erweitert werden:

$$\underbrace{\frac{3a}{y} + \frac{2y}{x-1}}_{\text{Ungleichnamig}} \qquad \underbrace{y(x-1)}_{\text{kgV}}$$

$$\frac{3a \cdot (x-1)}{y \cdot (x-1)} + \frac{2y \cdot y}{(x-1) \cdot y} = \frac{3a(x-1) + 2y^2}{y(x-1)}$$

Bruchterme zusammenfassen

Um mehrere Bruchterme zu addieren oder subtrahieren, müssen diese **zwingend gleichnamig** sein.

Ein − vor einem Bruch bezieht sich beim Zusammenfassen immer auf den jeweiligen **gesamten Zähler**:

$$\frac{x}{a} - \frac{y-z}{a} = \frac{x - (y-z)}{a} = \frac{x-y+z}{a}$$

Mehrgliedrige Summen oder Differenzen müssen für den Kehrbruch **vorgängig** zusammengefasst werden:

$$\frac{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}}{\frac{x+y}{1}} = \frac{\frac{x^2}{xy} + \frac{2xy}{xy} + \frac{y^2}{xy}}{\frac{x+y}{1}} =$$

$$\frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}}{\frac{x+y}{1}} = \frac{\cancel{(x+y)} \cdot (x+y) \cdot 1}{\cancel{(x+y)} \cdot xy} = \frac{x+y}{xy}$$

Allgemeines zu Potenzen x^2

Alle Potenzen mit der **Basis 1** ergeben immer **1**:

$$1^0 = 1^1 = 1^{-3} = 1^a = 1$$

Alle Potenzen mit dem **Exponent 0** ergeben immer **1**:

$$5^0 = a^0 = (9^6 - a)^0 = 1$$

Alle Potenzen mit dem **Exponent 1** ergeben immer die **Basis** (der Exponent wird dann meistens weggelassen):

$$2^1 = 2 \qquad x^1 = x$$

Innerhalb des Exponenten kann **vereinfacht** werden:

$$3^{a+1-a} = 3^1 = 3 \qquad 5^{x-x} = 5^0 = 1$$

Bei **Zehnerpotenzen** gibt der Exponent immer die Anzahl 0 an:

$$10^1 = 10 \qquad 10^{-1} = 0,1$$
$$10^2 = 100 \qquad 10^{-2} = 0,01$$
$$10^3 = 1000 \qquad 10^{-3} = 0,001$$

Bei Potenzen mit **Nachkommastellen in der Basis** kann man zuerst die Zahl ausrechnen und diese anschliessend die Anzahl Nachkommastellen × den Exponenten hinter das Komma schieben:

$$0,\underbrace{03}_{2}{}^{4} = 0,\underbrace{00000081}_{2 \cdot 4 = 8}$$

Potenzen mit gleicher Basis x^2

Beim Rechnen mit Potenzen mit gleicher Basis, bleibt die **Basis** immer **unverändert**.

Beim **Multiplizieren** werden die Exponenten **addiert**:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \qquad x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

Beim **Dividieren** werden die Exponenten **subtrahiert**:

$$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Beim **Potenzieren** werden die Exponenten **multipliziert**:

$$(x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab} \qquad (x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6$$

Potenzen mit gleichem Exponenten x^2

Beim Rechnen mit Potenzen mit gleichem Exponenten, bleibt der **Exponent** immer **unverändert**.

Beim **Multiplizieren** werden die Basen **multipliziert**:

$$a^n b^n = (ab)^n \qquad 2^n \cdot 4^n = (2\cdot 4)^n = 8^n$$

Beim **Dividieren** werden die Basen **dividiert**:

$$a^n : b^n = (a : b)^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Negative Potenzen x^2

Steht das — **ausserhalb oder nicht** in Klammern, ist das Ergebnis **immer negativ**:

$$-1^4 = -1 \qquad -(2)^2 = -4$$

Bei einem — innerhalb der Klammer und **geradem** Exponent, ist das Ergebnis **positiv**:

$$(-1)^4 = 1 \qquad (-2)^{-2} = 0.25$$

Bei einem — innerhalb der Klammer und **ungeradem** Exponent, ist das Ergebnis **negativ**:

$$(-1)^5 = -1 \qquad (-2)^3 = -8$$

Bei mehreren Klammern muss die **Position** vom — genau berücksichtigt werden:

$$((-x)^4)^3 = x^{12} \qquad (-(x)^4)^3 = -x^{12}$$

Negative Exponenten x^2

Potenzen mit **negativem** Exponenten können als Bruch mit **positivem** Exponenten im Nenner geschrieben werden:

$$x^{-5} \rightarrow \frac{1}{x^5}$$

Potenzen können in Brüchen mit Produkttermen zwischen Nenner und Zähler **getauscht** werden, indem man das Vorzeichen des Exponenten **umkehrt**:

$$\frac{a^{-3}bc^{-1}}{y^{-2}x^3} = \frac{by^2}{a^3cx^3}$$

Brüche lassen sich mithilfe negativer Exponenten vermeiden:

$$\frac{1}{a^x} \rightarrow a^{-x}$$

Allgemeines zu Wurzeln $\sqrt{x}$

Alle Wurzeln mit dem **Radikanden 0** ergeben immer **0**:

$$\sqrt{0} = \sqrt[7]{0} = \sqrt[a]{0} = \sqrt[1]{0^x} = 0$$

Alle Wurzeln mit dem **Radikanden 1** ergeben immer **1**:

$$\sqrt{1} = \sqrt[7]{1} = \sqrt[a]{1} = \sqrt[1]{1^x} = 1$$

Alle Wurzeln mit dem **Wurzelexponenten 1** ergeben immer den **Radikanden**:

$$\sqrt[1]{a} = a \qquad \sqrt[1]{3^2} = 3^2$$

Jede Wurzel kann als Potenz geschrieben werden, wobei der **Wurzelexponent im Nenner** und der **Exponent im Zähler** des Bruchs geschrieben wird:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[3]{8^5} = 8^{\frac{5}{3}}$$

Gleicher Wurzelexponent und Exponent ergibt immer die Basis:

$$\sqrt[x]{a^x} = a^{\frac{x}{x}} = a \qquad \sqrt[7]{3^7} = 3^{\frac{7}{7}} = 3$$

Das Ergebnis zweier negativer Zahlen multipliziert, kann **nie** negativ sein. Deshalb gilt: **Gerader Wurzelexponent** und **negativer Radikand** ist undefiniert.

$$\sqrt[2]{-4} = undefiniert \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Immer **alles** auswurzeln, was möglich ist.

Der Nenner kann durch **erweitern** Wurzelfrei gemacht werden. Bei Strichrechnungen kann die 3. binomische Formel angewendet werden:

$$\frac{1}{x+\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(x-\sqrt{2})}{(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})} = \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$$

Wurzeln mit gleichem Radikanden $\sqrt{x}$

Beim **Multiplizieren** werden die gebrochenen Exponenten **gleichnamig** gemacht und **addiert**:

$$\underbrace{\sqrt[a]{x} \cdot \sqrt[b]{x} = x^{\frac{b+a}{ab}}}_{x^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = x^{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}} = x^{\frac{b+a}{ab}}} = \sqrt[ab]{x^{b+a}}$$

Beim **Dividieren** werden die gebrochenen Exponenten **gleichnamig** gemacht und **subtrahiert**:

$$\underbrace{\sqrt[a]{x} : \sqrt[b]{x} = x^{\frac{b-a}{ab}}}_{x^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = x^{\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}} = x^{\frac{b-a}{ab}}} = \sqrt[ab]{x^{b-a}}$$

Bei **mehreren Wurzeln** können die Wurzelexponenten **multipliziert oder vertauscht** werden:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \underbrace{\sqrt[ab]{x}}_{x^{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = x^{\frac{1}{ab}}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{x}}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten $\sqrt{x}$

Beim **Multiplizieren** können die Radikanden **multipliziert** werden:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{6}$$

Beim **Dividieren** können die Radikanden **dividiert** werden:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \frac{\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{8}{2}} = \sqrt[n]{4}$$

Logarithmensysteme $\log x$

Der **dekadische** Logarithmus ist der bekannteste Logarithmus und hat immer den Basiswert **10**:

$$\log_{10} a = \log a = \lg a$$

Der **binäre** Logarithmus (oder auch Logarithmus dualis) hat immer den Basiswert **2**:

$$\log_2 a = \mathrm{lb}\, a = \mathrm{ld}\, a$$

Der **natürliche** Logarithmus hat immer als Basiswert die **eulersche Zahl**:

$$\log_e a = \ln a$$

Allgemeines zu Logarithmen $\log x$

Der Logarithmus mit dem **Numerus 1** zu jeder Basis ergibt immer **0**:

$$\log_5 1 = \log_a 1 = \log 1 = \mathrm{lb}\, 1 = 0$$

Der Logarithmus mit dem **gleichen** Numerus wie die Basis ergibt immer **1**:

$$\log_4 4 = \log_a a = \log 10 = \mathrm{lb}\, 2 = 1$$

Logarithmusregeln $\log x$

Der Logarithmus eines **Produktes** ist die **Summe** der Logarithmen der einzelnen Faktoren:

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$$

$$\log_2(4\cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2+3 = 5$$

Der Logarithmus eines **Quotienten** ist die **Differenz** der Logarithmen von Zähler und Nenner:

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$$

$$\log_2\left(\frac{64}{8}\right) = \log_2 64 - \log_2 8 = 6-3 = 3$$

Der Logarithmus einer **Potenz** ist das **Produkt** aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis der Potenz:

$$\log_b n^x = x \cdot \log_b n$$

$$\log_2 4^3 = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$$

Der Logarithmus einer **Wurzel** ist der **Quotient** aus dem Radikand geteilt durch den Wurzelexponenten:

$$\log_b \sqrt[x]{n} = \frac{\log_b n}{x}$$

$$\log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{\log_2 64}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Für einen **Basiswechsel** muss der Logarithmus des Numerus zur neuen Basis durch den Logarithmus der alten Basis zur neuen Basis **geteilt** werden:

$$\log_b n = \frac{\log_x n}{\log_x b} = \frac{\log_5 n}{\log_5 b}$$

$$\log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$$