

Cheatsheet 2. Semester

Christian Rybovic
April 2025

1 Imaginäre Zahlen

Das quadrieren einer reellen Zahl ergibt nie ein negatives Resultat und das Wurzel ziehen aus einer negativen Zahl kann kein reelles Resultat ergeben. Damit trotzdem gerechnet werden kann, gibt es die **imaginäre Einheit i** mit folgender Eigenschaft:

$$i^2 = -1 \quad \sqrt{-1} = i$$

Anstelle von i , welches in der Elektrotechnik das Symbol für die Stromstärke ist, kann auch j geschrieben werden.

Mithilfe der imaginären Einheit können nun z.B. negative Wurzeln umgeformt werden.

INFO

$$\begin{aligned}\sqrt{-x} &= \sqrt{(-1) \cdot x} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{x} = i \cdot \sqrt{x} \\ \sqrt{-9} &= \sqrt{(-1) \cdot 9} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{9} = i \cdot 3 = 3i\end{aligned}$$

1.1 Strichrechnung

Imaginäre Zahlen werden wie reelle Zahlen addiert und subtrahiert.

INFO

$$\begin{aligned}3i + 2i &= 5i & -i + 2i - 5i &= -4i \\ -2i + 5i - i &= 2i & 4i - 7i &= -3i\end{aligned}$$

1.2 Multiplikation

Beim Multiplizieren muss die negative Wurzel immer zuerst als Produkt mit der imaginären Einheit geschrieben werden. Das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist immer reell.

INFO

$$\begin{aligned}\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y} &= i\sqrt{x} \cdot i\sqrt{y} = i^2 \sqrt{xy} = -\sqrt{xy} \\ \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y} &= \sqrt{(-x) \cdot (-y)} = \sqrt{xy} \\ \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} &= i\sqrt{9} \cdot i\sqrt{4} = i^2 \sqrt{9 \cdot 4} = -6 \\ \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} &= \sqrt{(-9) \cdot (-4)} = 36\end{aligned}$$

1.3 Division

Bei der Division empfiehlt es sich, denn Nenner durch erweitern rational zu machen.

INFO

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{i \cdot 2} = \frac{i\sqrt{2}}{i^2 \cdot 2} = \frac{i\sqrt{2}}{-2} = -i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1.4 Potenzen

Bei Potenzen der imaginären Einheit i gilt:

- Jede gerade Potenz ergibt immer abwechselnd die reelle Zahl $+1$ und -1 , wobei jede vierte und $i^0 = 1$ ergeben
- Jede ungerade Potenz ergibt abwechselnd $+i$ und $-i$
- Das Ergebnis aller i^{4n} und i^{4n+1} Potenzen haben immer ein positives Vorzeichen

INFO

$$\begin{aligned}i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^2 \cdot i^2} = \frac{1}{(-1) \cdot (-1)} = 1 \\ i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2 \cdot i} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = \frac{i}{-(-1)} = i \\ i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \\ i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{i}{-1} = -i \\ i^0 &= 1 \\ i^1 &= \sqrt{-1} = i \\ i^2 &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1\end{aligned}$$

2 Komplexe Zahlen

$$z = x + i \cdot y$$

Komplexe Zahlen bestehen aus einem **Realteil** (x) und einem **Imaginärteil** (y). Zur besseren Unterscheidung von reellen Grössen, werden die Variablen oft mit einem Unterstrich gekennzeichnet ($\underline{z}$).

2.1 Konjugiert-komplexe Zahl

Die konjugiert-komplexe Zahl wird mit einem Stern oder durch Überstreichungen gekennzeichnet. Sie unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

$$z^* = x - i \cdot y$$

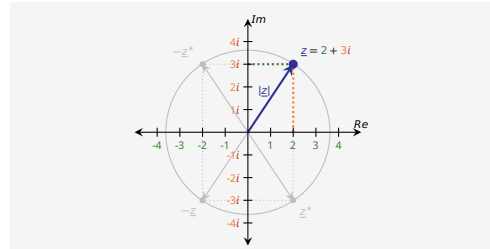
Die Summe und das Produkt zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist immer reell.

INFO

$$\begin{aligned}z + z^* &= (x + i \cdot y) + (x - i \cdot y) = 2x \\ z \cdot z^* &= (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2\end{aligned}$$

3 Gaußsche Zahlenebene

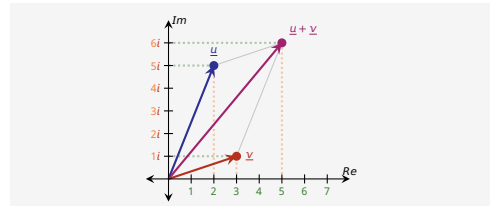
Die gaußsche Zahlenebene erlaubt es komplexe Zahlen in einem Koordinatensystem mit Realteil und Imaginärteil sichtbar zu machen.



Der Betrag $|z|$ ist der Abstand des Punktes vom Ursprung (0,0). Die Zahlen $z, z^*, -z$ und $-z^*$ haben alle den gleichen Betrag, entsprechend liegen alle Punkte auf einem Kreis.

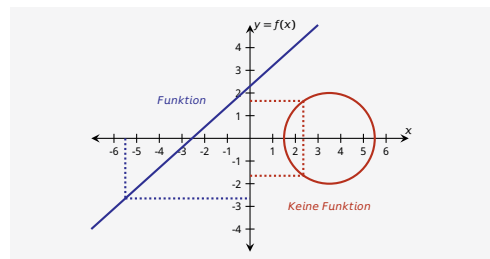
3.1 Addition

In der gaußschen Zahlenebene können komplexe Zahlen wie bei der Vektoraddition berechnet werden. Mithilfe der beiden Vektoren wird ein Parallelogramm gebildet, wobei die Diagonale dann das Ergebnis der Addition ist.

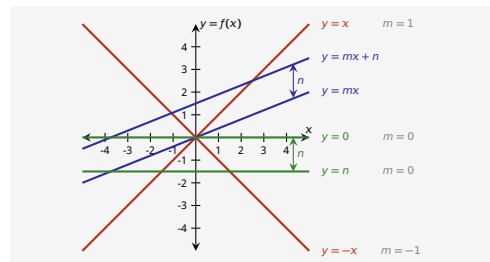


4 Funktionen

Eine Funktion liegt vor, wenn jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.

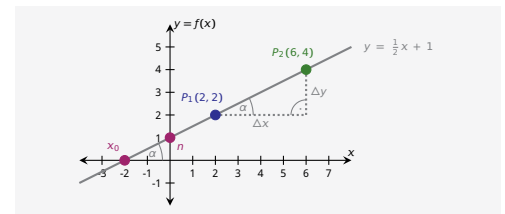


4.1 Lineare Funktionen



$$y = f(x) = m \cdot x + n$$

Durch zwei Punkte ist eine Gerade eindeutig definiert.



4.1.1 Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha \quad \Leftrightarrow \quad y = m \cdot x$$

Die Gerade steigt, wenn m positiv ist und fällt, wenn m negativ ist. Hat m den Wert 0, dann ist die Gerade waagrecht. Je grösser der Wert, desto steiler ist die Steigung. m wird auch Steigungs- bzw. Proportionalitätsfaktor genannt.

Um den Wert zu berechnen setzt man zuerst die Werte aus P_1 und P_2 in die Funktionsgleichung ein und stellt nach m um.

INFO

$$\begin{aligned}2 &= m \cdot 2 + n & (1) \\ 4 &= m \cdot 6 + n & (2) \\ n &= 2 - 2m & (1') \\ n &= 4 - 6m & (2') \\ 2 - 2m &= 4 - 6m \\ m &= \frac{4-2}{6-2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ m &= 0.5\end{aligned}$$

UMFORMEN NACH M

4.1.2 y-Achsenabschnitt

$$n = y_1 - m \cdot x_1 \quad n = -x_0 \cdot m$$

Der y-Achsenabschnitt ist der Wert, bei welchem die Gerade die y-Achse schneidet. Ist m bekannt, kann der Wert eingesetzt und der y-Achsenabschnitt n berechnet werden. Alternativ kann n auch mithilfe der Nullstelle x_0 berechnet werden.

INFO

$$\begin{aligned}4 &= m \cdot 6 + n \\ 4 &= 0.5 \cdot 6 + n \\ n &= 4 - 0.5 \cdot 6 \\ n &= 1\end{aligned}$$

UMFORMEN NACH N

4.1.3 Nullstellen

$$x_0 = -\frac{n}{m}$$

Die Nullstelle gibt an, wo die lineare Funktion die x-Achse schneidet. Um die Nullstelle zu berechnen setzt man zuerst 0 für y in die Funktionsgleichung ein und formt nach x um.

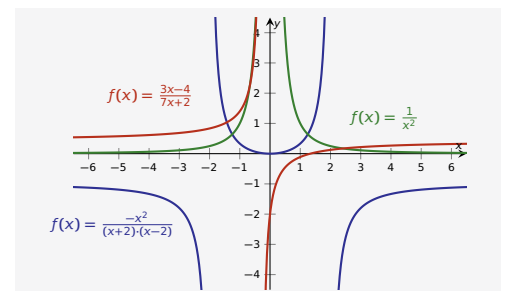
INFO

$$\begin{aligned}0 &= m \cdot x + n \\ 0 &= 0.5 \cdot x + 1 \\ x_0 &= -2\end{aligned}$$

UMFORMEN NACH X

4.2 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind Brüche, bei denen der Zähler und der Nenner ein Polynom enthält.



4.2.1 y-Achsenabschnitt

Der y-Achsenabschnitt ist der Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse. Zur Bestimmung muss einfach $x = 0$ gesetzt werden.

INFO

$$f(x) = \frac{3x - 4}{7x + 2}$$

FÜR X DEN WERT 0 EINSETZEN

$$y_0 = \frac{3 \cdot 0 - 4}{7 \cdot 0 + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

4.2.2 Nullstellen

Bei gebrochen rationalen Zahlen muss zum bestimmen der Nullstellen nur der Zähler beachtet werden. Für lineare Funktionen muss nach x aufgelöst werden, bei quadratischen Funktionen kann die abc- oder pq-Formel verwendet werden, und bei ganzrationalen Funktionen können die Nullstellen mithilfe der Polynomdivision bestimmt werden.

INFO

$$f(x) = \frac{3x - 4}{7x + 2}$$

ZÄHLER NACH X AUFLÖSEN

$$3x - 4 = 0 \quad | +4$$

$$3x = 4 \quad | :3$$

$$x_0 = \frac{4}{3}$$

4.2.3 Polstellen

Die Polstelle gibt an, an welcher Stelle die Funktionswerte gegen unendlich laufen. Verantwortlich dafür sind die Nenner-Nullstellen.

INFO

$$f(x) = \frac{3x - 4}{7x + 2}$$

NENNER NACH X AUFLÖSEN

$$7x + 2 = 0 \quad | -2$$

$$7x = -2 \quad | :7$$

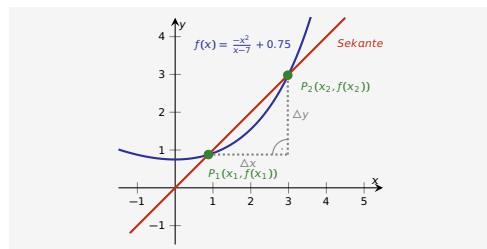
$$x_\infty = -\frac{2}{7}$$

5 Differenzieren

5.1 Differenzenquotient

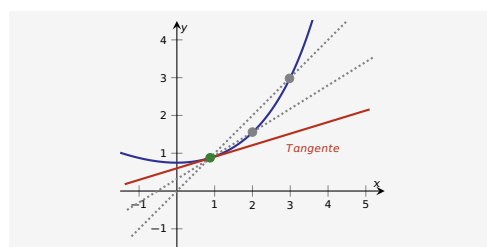
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Der Differenzenquotient gibt die Steigung einer **Sekante** an, welche eine Funktion durch zwei Punkte schneidet. Anders gesagt gibt er die **mittlere Änderungsrate** einer Funktion über ein betrachtetes Intervall an.



5.2 Differentialquotient

Der Differentialquotient (Ableitung) gibt die **momentane Änderungsrate** einer Funktion an einer bestimmten Stelle an, also die Steigung der **Tangente**.



5.2.1 Konstante

$$n \rightarrow 0$$

Befindet sich in der Funktion **kein** x, dann ist die Ableitung 0.

INFO

$$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = -\sqrt{5} \rightarrow f'(x) = 0$$

5.2.2 Potenzregel

$$x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$$

Bei Potenzen wird die Hochzahl als Faktor nach vorne genommen und der Exponent um 1 verringert.

INFO

$$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3$$

$$f(x) = x^{-6} \rightarrow f'(x) = -6 \cdot x^{-7}$$

5.2.3 Faktorregel

Beim Faktor können alle Teile übernommen werden.

INFO

$$f(x) = 4x \rightarrow f'(x) = 4$$

$$f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2$$

$$f(x) = \frac{x^3}{4} = \frac{1}{4}x^3 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot x^2$$

5.2.4 Summenregel

Bei Summen wird jeder Summand separat abgeleitet.

INFO

$$f(x) = x^2 - 2x^4 + 8 \rightarrow f'(x) = 2x - 2 \cdot 4 \cdot x^3 + 0$$

$$= 2x - 8x^3$$

5.2.5 Produktregel

$$u \cdot v \rightarrow u' \cdot v + u \cdot v'$$

Bei der Produktregel wird zuerst jeder Teil für sich abgeleitet und anschließend gem. Regel zusammengesetzt.

INFO

$$f(x) = \underbrace{x^4}_u \cdot \underbrace{x^5}_v$$

$$u = x^4 \rightarrow u' = 4x^3$$

$$v = x^5 \rightarrow v' = 5x^4$$

$$f'(x) = \underbrace{4x^3}_{u'} \cdot \underbrace{x^5}_v + \underbrace{x^4}_u \cdot \underbrace{5x^4}_{v'}$$

$$= 4x^8 + 5x^8$$

$$= 9x^8$$

5.2.6 Quotientenregel

$$\frac{u}{v} \rightarrow \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Die Quotientenregel wird ähnlich der Produktregel durch separieren und zusammensetzen gelöst.

INFO

$$f(x) = \frac{\underbrace{2x+6}_u}{\underbrace{x^5}_v}$$

$$u = 2x + 6 \rightarrow u' = 2$$

$$v = x^5 \rightarrow v' = 5x^4$$

$$f'(x) = \frac{\underbrace{\frac{u'}{v}}_{\frac{2}{x^5}} \cdot \underbrace{v}_{x^5} - \underbrace{u}_{2x+6} \cdot \underbrace{\frac{v'}{v^2}}_{\frac{5x^4}{x^{10}}}}{v^2}$$

$$= \frac{2x^5 - (2x+6) \cdot 5x^4}{x^{10}}$$

$$= \frac{-8x^5 + 30x^4}{x^{10}} = -\frac{2(4x+15)}{x^6}$$

5.2.7 Kettenregel

$$u^v \rightarrow u' \cdot v'$$

Bei der Kettenregel wird die Ableitung des inneren Teils mit der Ableitung des äusseren Teils multipliziert.

INFO

$$f(x) = \underbrace{(x^4 + 2)}_u^v$$

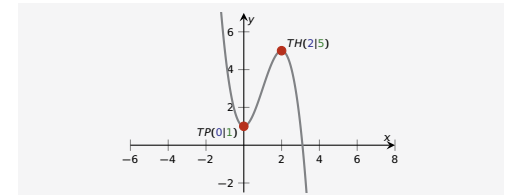
$$u = x^4 + 2 \rightarrow u' = 4x^3$$

$$v = u^3 \rightarrow v' = 3u^2$$

$$f'(x) = \underbrace{4x^3}_{u'} \cdot \underbrace{3 \cdot (x^4 + 2)^2}_{v'}$$

$$= 12x^{11} + 48x^7 + 48x^3$$

6 Extrempunkte



Extrempunkte sind die Hochpunkte $HP(x_H|y_H)$ und Tiefpunkte $TP(x_T|y_T)$ einer Funktion. Bei Extrempunkten nennt man die x-Koordinaten **Extremstellen** (x_E) und die y-Koordinaten **Extremwerte** (y_E).

Für die Berechnung muss man zuerst die Funktion (f) zweimal ableiten. Anschließend die Nullstellen der 1. Ableitung (f') berechnen und diese in die 2. Ableitung (f'') einsetzen. Indem man die Extremstelle x_E in die Funktion (f) einsetzt, erhält man y_E . Für die zweite Ableitung gilt:

$$f''(x_E) < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt (Maxima)}$$

$$f''(x_E) = 0 \rightarrow \text{Möglicherweise Sattelpunkt}$$

$$f''(x_E) > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt (Minima)}$$